



Olimpiada de Matematică - Etapa Locală
Maramureș – 28 februarie 2016
Clasa a VI - a

1. a) Arătați că numărul

$$N = (2 + 4 + 6 + \dots + 4032) \cdot \left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2015 \cdot 2017} \right)$$

este un pătrat perfect.

b) Fie \widehat{AOB} un unghi alungit, $D \notin AB$ și $[OC]$ bisectoarea unghiului \widehat{DOA} . Știind că măsura unghiului \widehat{COD} este $\frac{2}{5}$ din măsura unghiului \widehat{DOB} , calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor \widehat{BOD} și \widehat{COD} .

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și A_1, A_2, \dots, A_n puncte coliniare în aceasta ordine astfel încât $A_1A_2 = x$, $A_2A_3 = 2x$, $A_3A_4 = 3x$, \dots , $A_{n-1}A_n = (n-1)x$, unde $x \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă M este mijlocul segmentului (A_9A_{10}) și N este mijlocul segmentului $(A_{24}A_{25})$, aflați lungimea segmentului (MN) știind că $x = 2cm$.

b) Aflați x și n astfel încât $A_1A_n = 870cm$.

3. Se dă fracția $\frac{2x+3}{2x-7}$, cu $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 4$. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ primele 1000 de numere naturale pentru care fracția se simplifică.

a) Calculați x_{1000} .

b) Arătați că $x_p + x_q - x_{p+q} = 1$ oricare ar fi $p, q \in \{1, 2, \dots, 1000\}$.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Timp de lucru 2 ore

Problemele au fost propuse și selectate de către:

Conf.univ.Horvat Marc Andrei- Centrul Universitar Nord Baia Mare

Prof. Darolți Erica- Colegiul național „V.Lucaciu” Baia Mare

Prof. Serasz Maria- Școala Gimnazială „D. Cantemir” Baia Mare

BAREME – clasa a VI a

Soluție. 1.

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 4032 = 2016 \cdot 2017$

1 punct

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{2015 \cdot 2017} = \frac{2016}{2017}$$

2 puncte

$N = 2016^2$ pătrat perfect

1 punct

b) Fie $x = m(\widehat{COD})$. Atunci $x = \frac{2}{5}(180 - 2x)$

1 punct

$x = 40^\circ$

1 punct

Fie $[OM]$ bisectoarea unghiului \widehat{COD} și $[ON]$ bisectoarea unghiului \widehat{BOD}

$m(\widehat{MOD}) = 20^\circ, m(\widehat{DON}) = 50^\circ$

$m(\widehat{MON}) = 70^\circ$ 1 punct

Soluție. 2.

a) $A_9A_{10} = 18cm, A_9M = MA_{10} = 9cm$

0,5 puncte

$A_{24}A_{25} = 48cm, A_{24}N = NA_{25} = 24cm$

0,5 puncte

$MN = MA_{10} + A_{10}A_{11} + \dots + A_{23}A_{24} + A_{24}N$

1 punct

$MN = 9 + (20 + 22 + \dots + 46) + 24$

1 punct

$MN = 495 cm$

1 punct

b) $A_1A_n = x + 2x + \dots + (n-1)x = x \cdot \frac{(n-1)n}{2}$

1 punct

$n(n-1) \cdot x = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$

0,5 puncte

$n(n-1) | 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \Rightarrow n \in \{2,3,4,5,6,30\}$

0,5 puncte

$n = 2 \Rightarrow x = 870$

$n = 3 \Rightarrow x = 290$

$n = 4 \Rightarrow x = 145$

$n = 5 \Rightarrow x = 87$

$n = 6 \Rightarrow x = 58$

$n = 30 \Rightarrow x = 2$

1 punct

Soluție. 3.

a) Frația $\frac{2x+3}{2x-7}$ este reductibilă dacă există $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$ astfel încât $d|2x+3$ și $d|2x-7$ **1 punct**

Cum $d \in \{2,5,10\}$ și $2x+3$, $2x-7$ numere impare, rezultă $d=5$ **1 punct**

$2x+3=5k$, k număr impar **1 punct**

$k=2p+1$, $x_p=5p+1$, $p \geq 1$ **1 punct**

$x_{1000}=5001$ **1 punct**

b) $x_p=5p+1$, $x_q=5q+1$, $x_{p+q}=5(p+q)+1$ **1 punct**

Verifică relația **1 punct**